Санкт-Петербургский государственный университет

Золотарев Егор Владимирович

Выпускная квалификационная работа

Алгебраические кобордизмы специальной ортогональной группы

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.,, доцент
Петров Виктор Александрович

Рецензент:
Doktor der Mathematik
Профессор
Университет
Людвига и Максимилиана, Мюнхен
Семенов Никита Сергеевич

Санкт-Петербург
2020 г.

Содержание

1 Введение **2**

2 Ориентированные теории когомологий **3**

3 Расслоения со слоем квадрика **7**

3.1 Базис в когомологиях квадрики 7

3.2 Квадратичные формы на векторных расслоениях 8

4 Линейные соотношения в кобордизмах SO_n **14**

Литература **17**

1 Введение

Исторически изучение структуры кольца Чжоу или в негладком случае групп Чжоу, являлось одной из главных задач алгебраической геометрии, так как в данных инвариантах содержится информация про все подмногообразия исходного многообразия, что позволяет эффективно описывать геометрические свойства. Другим интересным инвариантом многообразия является K-теория, которая была построена Александром Гротендиком для обобщения теоремы Хирцебруха-Римана-Роха и описывает вектроные расслоения над нашим многообразием.

Обобщая данные инварианты М. Левин и Ф.Морель в [9] ввели аксиоматическое понятие ориентированных теорий когомологий, которое является алгебро-геометрическим аналогом комплексно-ориентированных теорий когомологий в топологии, построив универсальную теорию - алгебраические кобордизмы. Кроме того, примерами таких теорий являются K-теория Моравы, коннективная K-теория, когомологии Брауна-Петерсона. Похожую концепцию ввели И.Панин и А.Смирнов и доказали обобщение теоремы Гротендика-Римана-Роха [14].

Данная работа посвящена вычислению некоторых соотношений в кольце алгебраических кобордизмов специальной ортогональной группы произвольного ранга с помощью явных геометрических конструкций. Согласно [12] на образующие кольца Чжоу данной группы $X_1, ...X_N$, которые являются пулбэками некоторых многообразий Шуберта с многообразия полных флагов, есть соотношения двух видов: "квадрататичные" и "линейные", причём последние имеют вид $2X_i = 0$, для всех i. В данной работе вычисляются аналоги только линейных соотношений. Похожей техникой могут быть получены и квадратичные соотношения, но это тема дальнейшей работы. Подобные вычисления фактор кольца кобордизмов по некоторому идеалу методами алгебраической топологии для $Spin_n$ были проделаны Ягитой [15] для опровержения гипотезы Карпенко о строении кольца Чжоу многообразия флагов версального торсора, но в данном вычислении теряется большое количество информации, в частности, доказанные нами соотношения являются новыми.

Работа устроена следующим образом: в 1 главе даются основные определения и свойства ориентированных теорий когомологий, в главе 2 доказываются некоторые свойства кольца кобордизмов расслоений квадрик, имеющих максимальное тотально изотропное подрасслоение, в главе 3 результаты предыдущей главы применяются для вычисления "линейных" соотношений в кольце кобордизмов многообразия полных флагов, из которых факторизацией получаются соотношения для SO_n. Основными результатами являются теоремы 4.1 и 4.2.

В работе свободно используется терминология алгебраической геометрии и теории алгебраических групп, для подробного изложения отсылаем читателя к [5], [11].

Соглашения Под многообразием мы будем понимать отделимую квазипроективную схему конечного типа над полем. Точка всегда означает замкнутую точку. Под вложением мы будем понимать замкнутое вложение, если противное не оговорено явно.

2 Ориентированные теории когомологий

Обозначим через $\mathbf{Sm}_k$ категорию гладких многообразий над полем k, а через $\mathbf{Rings}^{\mathbb{Z}}$ категорию коммутативных, $\mathbb{Z}$ - градуированных колец с 1. Вместо $Spec(k)$ мы будем писать просто pt.

Определение 2.1. *Ориентированная теория когомологий это:*

- *(D1) Аддитивный функтор $A^* : \boldsymbol{Sm}_k^{op} \to \boldsymbol{Rings}^{\mathbb{Z}}$*
- *(D2) Для каждого проективного морфизма $f : Y \to X$ относительной коразмерности d, гомоморфизм $A^*(X)$ - модулей:*

$$f_* : A^*(Y) \to A^{*+d}(X).$$

Которые удовлетворяют:

- *(A1) $(id_X)_* = id_{A^*(X)}$ и если $f : Y \to X$ проективный морфизм относительной размерности d, а $g : Z \to Y$ проективный морфизм размерности e, то $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* : A^*(Z) \to A^{*+e+d}(X)$.*
- *(A2) Пусть $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ - трансверсальные морфизмы,*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

декартов квадрат, причем f - проективный. Тогда $g^* f_* = f'_* g'^*$.

- *(PB) Пусть $E \to X$ - векторное расслоение ранга n, над гладким многообразием X. $\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}(E)$ каноническое линейное расслоение с нулевым сечением $s : \mathbb{P}(E) \to \mathcal{O}(1)$. Определим $\xi \in A^1\mathbb{P}(E)$ следующим образом: $\xi := s^*(s_*(1))$. Тогда $A^*\mathbb{P}(E)$ свободный $A^*(X)$-модуль, с базисом $(1, \xi, ..., \xi^{n-1})$.*

- *(EH) Пусть $E \to X$ векторное расслоение над гладким многообразием X, $p : V \to X$ - E - торсор. Тогда $p^* : A^*(X) \to A^*(V)$ - изоморфизм.*

Морфизм ориентированных теорий когомологий - это естественное преобразование функторов, которое коммутирует с морфизмами f_*.
Для ориентированной теории когомологий A^* можно определить классы Черна следующим образом: для векторного расслоения $E \to X$ ранга n над X по аксиоме (PB) существуют единственные $c_i^A(E) \in A^i(X)$, $i \in 0, ..., n$, такие что $c_0^A(E) = 1$ и $\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i^A(E)\xi^{n-i} = 0$.
Классы Черна удовлетворяют следующим свойствам:

1. Для любого линейного расслоения L над $X \in \mathbf{Sm}_k$, $c_1^A(L)$ равен $s^*(s_*(1)) \in A^1(X)$, где $s : X \to L$ обозначает нулевое сечение.

2. Для любого морфизма $Y \to X$ и для любого расслоения E над X, для каждого $i \geq 0$ выполняется
$$c_i^A(f^*(E)) = f^*(c_i^A(E)).$$

3. Формула Уитни: если
$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$
короткая точная последовательность векторных расслоений, то для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:
$$c_n^A(E) = \sum_{i=0}^n c_i^A(E') c_{n-i}^A(E'').$$

Напомним, что одномерный коммутативный формальный групповой закон с коэффициентами в R это пара (R, F) содержащая коммутативное кольцо R и формальный ряд $F(u,v) = \sum_{i,j} a_{i,j} u^i v^j \in R[[u,v]]$, такой что выполняются следующие свойства:

1. $F(u, 0) = F(0, u) = u \in R[[u]]$
2. $F(u, v) = F(v, u) \in R[[u, v]]$
3. $F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w) \in R[[u, v, w]]$.

Далее все формальные групповые законы являются коммутативными и одномерными.

Существует универсальный формальный групповой закон, который строится следующим образом: положим $\tilde{\mathbb{L}} := \mathbb{Z}[A_{i,j} \mid (i,j) \in N^2]$ и $\tilde{F}(u,v) = \sum_{i,j} A_{i,j} u^i v^j \in \tilde{\mathbb{L}}[[u,v]]$, далее отфакторизуем это кольцо по идеалу порожденному соотношениями 1-3. Получившееся фактор-кольцо обозначается через $\mathbb{L}$ и называется кольцом Лазара, а $F(u,v) = \sum_{i,j} a_{i,j} u^i v^j \in \mathbb{L}[[u,v]]$ обозначает образ $\tilde{F}$ относительно гомоморфизма $\tilde{\mathbb{L}} \to \mathbb{L}$ и является формальным групповым законом. По построению понятно, что задание формального группового закона (R, F) эквивалентно заданию гомоморфизма колец $\mathbb{L} \to R$. Мы считаем кольцо Лазара градуированным, причём $a_{i,j}$ имеет степень $1 - i - j$.

Справедлива следующая лемма, которая строит по каждой ориентированной теории когомологий A^* формальный групповой закон:

Лемма 2.1. *Для любого линейного расслоения L элемент $c_1^A(L)$ нильпотентен (то есть $c_1^A(L)^n = 0$ для достаточно большого n) и существует единственный формальный групповой закон $F_A(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in A^*(pt)[[x,y]]$, где $a_{i,j} \in A^{1-i-j}(pt)$, такой что $c_1^A(L \otimes M) = F_A(c_1^A(L), c_1^A(M))$ для любых двух линейных расслоений L и M.*

Доказательство. [9, Лемма 1.1.3.] □

В частности с каждой ориентированной теорией связывается гомоморфизм колец классифизирующий её формальный групповой закон $\Phi_A : \mathbb{L} \to A^*(pt)$.

Пример 2.1. *1. Кольцо Чжоу: $X \mapsto CH^*(X)$. В этом случае формальный групповой закон на $CH^*(pt) = \mathbb{Z}$ аддитивный: $F(x,y) = x + y$.*

2. *K-теория: пусть $K^0(X)$ обозначает группу Гротендика локально свободных пучков на X, тогда $K^0(X)[\beta, \beta^{-1}] := K^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ определяет ориентированную теорию когомологий, где $\mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ кольцо многочленов Лорана с переменной β степени -1. Легко показать, что формальный групповой закон на $K^0(pt)[\beta, \beta^{-1}] = \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ мультипликативный: $F_{K^0}(x, y) = x + y - \beta xy$.*

Но при ограничении на характеристику базового поля существует универсальная ориентированная теория когомологий в следующем смысле:

Теорема 2.1. *Предположим, что характеристика базового поля равна нулю. Тогда существует ориентированная теория когомологий обозначаемая $X \mapsto \Omega^*(X)$ и называемая алгебраическими кобордизмами, такая что для любой теории A^* существует и единственнен морфизм $\nu : \Omega^* \to A^*$.*

Доказательство. [9, Теорема 1.2.6] □

Насчёт подробного определения данной теории см. [9, Глава 2], так же в работе [10] описана более геометрическая версия, где аддитивными образующими $\omega^*(X)$ для $X \in \mathbf{Sm}_k$ выступают классы изоморфности морфизмов $f : M \to X$, где M гладкое многообразие, а f проективен. Следующий результат описывает кольцо коэффициентов и формальный групповой закон теории Ω^*:

Теорема 2.2. *Для любого поля k характеристики ноль, канонический гомоморфизм $\Phi_\Omega : \mathbb{L} \to \Omega^*(pt)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. [9, Теорема 1.2.7] □

Так же сформулируем результаты связывающие алгебраические кобордизмы с более известными теориями:

Теорема 2.3. *Предположим, что характеристика базового поля равна нулю. Тогда канонический морфизм $\Omega^* \to CH^*$ индуцирует изоморфизм $\Omega^* \otimes_{\mathbb{L}} \mathbb{Z} \to CH^*$.*

Доказательство. [9, Теорема 1.2.19] □

Теорема 2.4. *Предположим, что характеристика базового поля равна нулю. Тогда канонический морфизм $\Omega^* \to K^0[\beta, \beta^{-1}]$ индуцирует изоморфизм $\Omega^* \otimes_{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}] \to K^0[\beta, \beta^{-1}]$.*

Доказательство. [9, Теорема 1.2.18] □

3 Расслоения со слоем квадрика

3.1 Базис в когомологиях квадрики

Далее всюду будем считать, что характеристика базового поля k равна нулю.
Хорошо известно, что для расщепимой квадрики Q кольцо $A^*(Q)$ - это свободный модуль над $A^*(pt)$. Мы введем явный базис в $\Omega^*(Q)$ используя универсальность алгебраических кобордизмов.
Пусть Q - это гладкая проективная квадрика размерности $n-2$, заданная невырожденой квадратичной формой $q : V \to k$ на векторном пространстве размерности n. Предположим что Q расщепима, то есть q имеет наибольший возможный индекс Витта. Введем обозначение $n = 2d$, если n чётно, и $n = 2d + 1$, иначе. Обозначим через $i : Q \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ вложение квадрики в проективизацию V.

Лемма 3.1. *Пусть $h = i^*(H) \in CH^1(Q)$, где H - класс гиперплоскости, а l - класс максимального тотально изотропного подпространства. Тогда*
а) если n чётно, то $1, h, ..., h^{d-1}, l, hl, ..., h^{d-1}l$ базис для $CH^*(Q)$.
б) если n нечётно, то $1, h, ..., h^{d-1}, l, hl, ..., h^{d-1}l$ базис для $CH^*(Q)$.

Доказательство. [2, Лемма 1] □

Так как расщепимая квадрика является клеточным многообразием в определении [13, 4.2], то по [13, Теорема 5.9] $MGL^{2*,*}(Q)$ является свободным $MGL^{2*,*}(pt)$-модулем, но так как по [8] $\Omega^*(X) \cong MGL^{2*,*}(X)$ для всех гладких многообразий X, получаем, что алгебраические кобордизмы расщепимой квадрики являются свободным $\mathbb{L}$-модулем.

Лемма 3.2 (Градуированная лемма Накаямы). *Пусть M и N градуированные $\mathbb{L}$-модули, N конечно порожден и $f : M \to N$ гомоморфизм $\mathbb{L}$-модулей, который сохраняет градуировку. Тогда*
а) $\mathbb{L}^{<0}N = N \Longrightarrow N = 0$
б) если $f \otimes \mathbb{Z} : M/\mathbb{L}^{<0}M \to N/\mathbb{L}^{<0}N$ сюръективен, то сюръективен и f.

Доказательство. [7, Глава 2, утверждения 4.3 и 4.4] □

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(Q) & \xrightarrow{\phi_\Omega} & \oplus_i \mathbb{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^*(Q) & \xrightarrow{\phi_{CH}} & \oplus_i \mathbb{Z} \end{array}$$

где ϕ_{CH} - выбор базиса из леммы 3.1, а ϕ_Ω отправляет элементы некоторого поднятия базиса $CH^*(Q)$ на $\Omega^*(Q)$ в базис $\oplus_i \mathbb{L}$. Тогда по лемме 3.2 ϕ_Ω - изоморфизм, тем самым мы показали что любое поднятие базиса кольца Чжоу как свободной абелевой группы является базисом алгебраических кобордизмов как $\mathbb{L}$-модуля. В частности верно следующее утверждение:

Предложение 3.3. *Пусть $h = c_1^\Omega(\mathcal{O}_Q(1))$, а $l = j_*(1)$, где $j : \mathbb{P}(E) \hookrightarrow Q$ - вложение максимального изотропного подпространства. Тогда*
а) если n чётно, то $1, h, ..., h^{d-1}, l, hl, ..., h^{d-1}l$ базис для $\Omega^*(Q)$.
б) если n нечётно, то $1, h, ..., h^{d-1}, l, hl, ..., h^{d-1}l$ базис для $\Omega^*(Q)$.

3.2 Квадратичные формы на векторных расслоениях

Определение 3.1. *Пусть $V \to X$ векторное расслоение над гладким многообразием X. Квадратичная форма на V - это сечение $q \in H^0(X, S^2V^*)$, ограничение которого на каждый слой является невырожденной гиперболической квадратичной формой.*

Пусть q квадратичная форма на векторном расслоении $V \to X$ ранга N равного $2n$ или $2n+1$. Будем говорить, что пара (V, q) Зариски локально-тривиальна, если существует открытое в топологии Зариского покрытие U_i многообразия X, такое что $V_{|U_i} \cong X \times \mathbb{A}^N$ и под действием этого изоморфизма квадратичная форма на слое над точкой $u \in U_i$ задана:

$$\text{(если ранк } V \text{ равен } 2n) \; q(v,v) = v_1 v_{2n} + ... + v_n v_{n+1}$$
$$\text{(если ранк } V \text{ равен } 2n+1) \; q(v,v) = v_1 v_{2n+1} + ... + v_n v_{n+2} + f(u) v_{n+1}^2.$$

Здесь $v = (v_1, ..., v_N)$ вектор в слое над точкой u и f нигде не равная нулю функция на U_i.

Рассмотрим ассоциированное с квадратичной формой на векторном расслоении расслоение на квадрики $\rho : Quad_X(V) \to X$, которое является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}(V)$. В дальнейших вычислениях нам будет необходимо, чтобы оно было локально-тривиальным в топологии Зариского. Согласно [2] это выполняется, в частности, при условии существования максимального изотропного подрасслоения, т.е. изотропного подрасслоения E в V ранга n. Обозначим через h, как и в случае квадрики, пулбэк класса гиперплоскости $H = c_1^{\Omega}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ относительно вложения $i : Quad_X(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ и через $l := j_*(1)$ класс проективизации максимального тотально изотропного подрасслоения, где $j : \mathbb{P}(E) \hookrightarrow Quad_X(V)$. Тогда справедлива следующая лемма, описывающая образующие алгебраических кобордизмов $Quad_X(V)$:

Лемма 3.4. *Любой элемент $\alpha \in \Omega^*(Quad_X(V))$ может быть представлен в виде*

$$\sum_{i=0}^{n-1} h^i \rho^*(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{n-1} h^i l \rho^*(\beta_i).$$

Доказательство. По Предложению 3.3 перечисленные классы порождают кобордизмы слоёв. Так как существует максимальное изотропное подрасслоение $\rho : Quad_X(V) \to X$ локально-тривиально в топологии Зариского. Возьмём замкнутое подмногообразие $Y \subset X$ коразмерности k, такую, что $U = X - Y$ аффинно, а $Quad_X(V)$ тривиально над U. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^{*-codim_X(Y)}(Y) & \longrightarrow & \Omega^*(X) & \longrightarrow & \Omega^*(U) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Omega^{*-codim_X(Y)}(\rho^{-1}(Y)) & \longrightarrow & \Omega^*(Quad_X(V)) & \longrightarrow & \Omega^*(\rho^{-1}(U)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

в которой вертикальные отображения - пулбэки вдоль проекции, а строки точны по [9, Теорема 1.2.8]. Диаграмный поиск показывает, что достаточно проверить утверждение леммы для ограничения $Quad_X(V)$ на U и Y. Используя нётерову индукцию, т.е. повторяя процесс для Y, достаточно провести доказательство для $X = U$.

$\square$

Введем несколько обозначений. Пусть x независимая переменная, тогда через через D_k обозначим элементы кольца Лазара $\mathbb{L}$, которые являются коэффициентами следующего формального ряда $F(x,x) = \sum_{k\geq 1} D_k x^k$, а через $\gamma_i(t_1, ..., t_m)$ многочлены от $t_1, ..., t_m$ с коэффициентами в $\mathbb{L}$ определяемые равенством $\prod_{i=1}^{m} F(t_i, x) = \sum_{j\geq 0} \gamma_j(t_1, ..., t_m) x^j$. Очевидно, что D_k

и $\gamma_i(t_1,...,t_m)$ не зависят от x. Через $\chi(x)$ будем обозначать обратный относительно формального группового закона элемент к x. Обозначение $\sum\limits_{I,\#I=m} \alpha_I$ означает сумму по всем последовательностям $I = (i_1,...,i_m)$ длины m, $|I|$ означает сумму элементов последовательности I. При $m=0$ последовательность I полагается пустой, тем самым $|I|=0$. Класс Черна последовательности I от векторного расслоения V полагается равным произведению классов Черна по всем элементам последовательности, т.е. $c_I^\Omega(V) := c_{i_1}^\Omega(V)c_{i_2}^\Omega(V)...c_{i_m}^\Omega(V)$. В качестве соглашения положим $c_\emptyset^\Omega(V)=1$ для любого расслоения V.

Предложение 3.5. *Пусть $V \to X$ векторное расслоение над гладким связным многообразием X ранга N, равного $2n$ или $2n+1$, с квадратичной формой и положим $d=N-n$. Пусть так же E и F максимальные изотропные подрасслоения V. Обозначим через x_i - корни Черна E, а через y_i -корни Черна F.*

а) Если N чётно, то существуют такие элементы $c_i \in \Omega^*(X)$ для $i=0,...,n-1$, удовлетворяющие соотношениям для $0 \le r \le 2n-1$ и некоторых $\alpha_i \in \Omega^*(X)$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,...,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-i-1\\ i+k-|I|=r\\ k\geq 1}} (-1)^{|I|-m+i} c_{n-i-1} c_I^\Omega(V) D_k + \sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,...,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-j\\ dim(X)\geq |I|\\ i+j-|I|=r\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m} c_I^\Omega(V)\alpha_i\gamma_j(\chi(x_1),...,\chi(x_n)) =$$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ dim(X)\geq |I|+n-j\\ dim(X)\geq |I|\\ j-|I|=r\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m} c_I^\Omega(V)(\gamma_j(\chi(x_1),...,\chi(x_n))+\gamma_j(\chi(y_1),...,\chi(y_n))).$$

б) Если N нечётно, то существуют такие элементы $c_i \in \Omega^*(X)$ для $i=1,...,n$, удовлетворяющие соотношениям для $0 \le r \le 2n$ и некоторых $\beta_i \in \Omega^*(X)$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,...,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-i\\ i+k-|I|=r\\ k\geq 1}} (-1)^{|I|-m+i} c_{n-i} c_I^\Omega(V) D_k + \sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,...,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-j+1\\ dim(X)\geq |I|\\ i+j-|I|=r\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m} c_I^\Omega(V)\beta_i\gamma_j(\chi(x_1),...,\chi(x_n),q) =$$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ dim(X)\geq|I|+n-j+1\\ dim(X)\geq|I|\\ j-|I|=r\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)(\gamma_j(\chi(x_1),...,\chi(x_n),q)+\gamma_j(\chi(y_1),...,\chi(y_n),p)),$$

где $q = c_1^{\Omega}(E^{\perp}/E)$, *а* $p = c_1^{\Omega}(F^{\perp}/F)$.

Замечание 3.6. *Так как в кольце Чжоу элемент* α_0 *из пункта a равен нулю, в кольце алгебраических кобордизмов он является нильпотентом.*

Доказательство. Обозначим через $[\mathbb{P}(E)] := j_*(1)$ и $[\mathbb{P}(F)] := k_*(1)$ классы соответствующих изотропных подрасслоений, где $j : \mathbb{P}(E) \hookrightarrow Quad_X(V)$, а $k : \mathbb{P}(F) \hookrightarrow Quad_X(V)$.

$$\begin{tikzcd} Quad_X(V) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathbb{P}(V) \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Предположим, что $N = 2n$, тогда по лемме 3.4 имеем:

$$[\mathbb{P}(E)] + [\mathbb{P}(F)] = \sum_{i=0}^{n-1} h^i\rho^*(\alpha_i) + \sum_{i=0}^{n-1} h^i l\rho^*(\beta_i)$$

для некоторых классов α_i и β_i в $\Omega^*(X)$. Вычислим пушфорвард от этого равенства вдоль замкнутого вложения i. По формуле проекции и коммутативности диаграммы выше получаем:

$$i_*(h^j\rho^*(\alpha)) = i_*(i^*(H^j\pi^*\alpha)) = H^j\pi^*(\alpha)i_*(1).$$

Так как расслоение со слоем квадрика соответствует сечению $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2)$, то по [9, 2.2.1 и 2.4.3] имеем $i_*(1) = c_1^{\Omega}(\mathcal{O}(Q)) = F(H,H)$. Согласно [3, Дополнение B.5.6] $\mathbb{P}(E)$ является многообразием нулей регулярного сечения расслоения $\pi^*(V/E)\otimes\mathcal{O}(1)$ над $\mathbb{P}(V)$. Тогда по формуле Гротендика для ориентированных теорий когомологий [1, Теорема 3] имеем

$$\begin{gathered} i_*(h^j l\rho^*(\beta)) = H^j\pi^*(\beta)i_*(l) = H^j\pi^*(\beta)(i\circ j)_*(1) = \\ H^j\pi^*(\beta)c_n^{\Omega}(\pi^*(V/E)\otimes\mathcal{O}(1)). \end{gathered}$$

Так как в чётномерном случае $V/E \cong E^*$, то по [6, Леммы 2.3.5 и 2.3.6] старший класс Черна $\pi^*(V/E)\otimes\mathcal{O}(1)$ равен $\prod_i F(\pi^*\chi(x_i), H)$.

С другой стороны $i_*([\mathbb{P}(E)] + [\mathbb{P}(F)])$ можно посчитать по формуле Гротендика. Тем самым доказана следующая формула:

$$\sum_{i=0}^{n-1}[H^i\pi^*(\alpha_i)F(H,H)]+\sum_{i=0}^{n-1}[H^i\pi^*(\beta_i)\prod_{j=1}^{n}F(\pi^*\chi(x_i),H)]=$$
$$\prod_{i=1}^{n}F(\pi^*\chi(x_i),H)+\prod_{i=1}^{n}F(\pi^*\chi(y_i),H).$$

Заменяя $F(H,H)$ на $\sum\limits_{i\geq 1}D_iH^i$, $\prod\limits_{i=1}^{n}F(\pi^*(\chi(x_i)),H)$ на $\sum\limits_{i\geq 0}\gamma_i(\pi^*\chi(x_1),...,\pi^*\chi(x_n))H^i$ получим:

$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1}}H^{i+k}\pi^*(\alpha_i)D_k+\sum_{\substack{j\geq 0\\ i=0,\dots,n-1}}H^{i+j}\pi^*(\beta_i)\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),...,\pi^*\chi(x_n))=$$
$$\sum_{j\geq 0}(\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),...,\pi^*\chi(x_n))+\gamma_j(\pi^*\chi(y_1),...,\pi^*\chi(y_n)))H^j$$

Рассмотрим первую сумму в равенстве выше, расписывая её в две суммы и используя определение классов Черна получим:

$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1\\ i+k<2n}}H^{i+k}\pi^*(\alpha_i)D_k+\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1\\ i+k\geq 2n}}H^{i+k}\pi^*(\alpha_i)D_k=\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1\\ i+k<2n}}H^{i+k}\pi^*(\alpha_i)D_k+$$
$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1\\ i+k\geq 2n}}H^{i+k-2n}(\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j-1}c_j^{\Omega}(V)H^{2n-j})\pi^*(\alpha_i)D_k=$$
$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1\\ i+k<2n}}H^{i+j}\pi^*(\alpha_i)D_k+\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,..,n-1\\ j=1,\dots,2n\\ i+k\geq 2n}}H^{i+k-j}(-1)^{j-1}c_j^{\Omega}(V)\pi^*(\alpha_i)D_k.$$

Повторяя данное рассуждение, по индукции получаем следующее равенство:

$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ i=0,\dots,n-1}}H^{i+k}\pi^*(\alpha_i)D_k=\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,\dots,n-1\\ dim(X)\geq|I|+n-i-1\\ i+k-|I|<2n\\ k\geq 1}}(-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)\pi^*(\alpha_i)D_kH^{i+k-|I|}.$$

Из определения видно, что степень $\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),...,\pi^*\chi(x_n))$ равна $n-j$. Так как степень элементов β_i не превосходит нуля получаем следующие равенства:

$$\sum_{\substack{j\geq 0\\ i=0,\ldots,n-1}} H^{i+j}\pi^*(\beta_i)\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),\ldots,\phi^*\chi(x_n)) =$$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,\ldots,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-j\\ dim(X)\geq |I|\\ i+j-|I|<2n\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)\pi^*(\beta_i)\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),\ldots,\pi^*\chi(x_n))H^{i+j-|I|}$$

$$\sum_{j\geq 0}\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),\ldots,\pi^*\chi(x_n))H^j =$$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ dim(X)\geq |I|+n-j\\ dim(X)\geq |I|\\ j-|I|<2n\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),\ldots,\pi^*\chi(x_n))H^{j-|I|}.$$

Тем самым нами доказана следующая формула:

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,\ldots,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-i-1\\ i+k-|I|<2n\\ k\geq 1}} (-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)\pi^*(\alpha_i)D_kH^{i+k-|I|} +$$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ i=0,\ldots,n-1\\ dim(X)\geq |I|+n-j\\ dim(X)\geq |I|\\ i+j-|I|<2n\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)\pi^*(\beta_i)\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),\ldots,\pi^*\chi(x_n))H^{i+j-|I|} =$$

$$\sum_{\substack{I,\#I=m\geq 0\\ dim(X)\geq |I|+n-j\\ dim(X)\geq |I|\\ j-|I|<2n\\ j\geq 0}} (-1)^{|I|-m}c_I^{\Omega}(V)(\gamma_j(\pi^*\chi(x_1),\ldots,\pi^*\chi(x_n)) +$$

$$\gamma_j(\pi^*\chi(y_1),\ldots,\pi^*\chi(y_n)))H^{j-|I|}$$

Теперь положим $c_i := (-1)^i\alpha_{n-i-1}$. Приравнивая элементы при разных степенях H получаем искомые в пункте а) соотношения.

В случае, когда $N = 2n+1$ положим $c_i := (-1)^i\alpha_{n-i}$, далее рассуждения аналогичны, за исключением вычисления старшего класса Черна расслоения $\pi^*(V/E)\otimes\mathcal{O}(1)$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow V/E^{\perp} \longrightarrow V/E \longrightarrow E^{\perp}/E \longrightarrow 0.$$

Так как $V/E^{\perp} \cong E^*$ по формуле Уитни получим:

$$c_k^{\Omega}(V/E) = c_k^{\Omega}(V/E^{\perp}) + c_{k-1}^{\Omega}(V/E^{\perp})c_1^{\Omega}(E^{\perp}/E) =$$
$$e_k(\chi(x_1), ..., \chi(x_n)) + e_{k-1}(\chi(x_1), ..., \chi(x_n))q = e_k(\chi(x_1), ..., \chi(x_n), q),$$

где $e_k(x_1, ..., x_n)$ обозначает элементарный симметрический многочлен степени k от $x_1, ..., x_n$. Тем самым получаем, что корни Черна V/E равны $\chi(x_1), ..., \chi(x_n), q$, следовательно, $c_{n+1}^{\Omega}(\pi^*(V/E) \otimes \mathcal{O}(1)) = F(q, H) \prod_{i=1}^{n} F(\pi^* \chi(x_i, H))$.

□

4 Линейные соотношения в кобордизмах SO_n

Обозначим через V векторное пространство размерности N равной $2n$ или $2n+1$ с невырожденной гиперболической квадратичной формой. Обозначим через $T \subset B \subset SO(V)$ фиксированный максимальный тор и содержащую его Борелевскую подгруппу в специальной ортогональной группе. Тогда $Fl(V) := SO(V)/B$ многообразие полных изотропных флагов. Заметим, что если $N = 2n$, то многообразие флагов имеет две компоненты связности. В этом случае через $Fl(V)$ мы будем обозначать одну из этих компонент.

Теорема 4.1. *$\Omega^*(SO_{2n+1}) \cong \mathbb{L}[c_1, ..., c_n]/I$, где идеал I содержит соотношения*

$$2c_n,\ 2c_{n-1} - D_2c_n,\ ...,\ 2c_1 - D_2c_2 + ... + (-1)^{n-1}D_nc_n.$$

Теорема 4.2. *$\Omega^*(SO_{2n}) \cong \mathbb{L}[c_1, ..., c_{n-1}]/I$, где идеал I содержит соотношения*

$$2c_{n-1},\ 2c_{n-2} - D_2c_{n-1},\ ...,\ 2c_1 - D_2c_2 + ... + (-1)^{n-2}D_{n-1}c_{n-1}.$$

Доказательство теоремы 4.2. Рассмотрим пулбэк V, как векторного расслоения над точкой вдоль структурного морфизма $Fl(V)$ и ассоциированное с этим расслоением расслоение на квадрики.

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(V) & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Fl(V) & \xrightarrow{\pi} & pt \end{array} \qquad \begin{tikzcd} Quad_{Fl(V)}(\pi^*V) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathbb{P}(\pi^*V) \arrow[dl] \\ & Fl(V) & \end{tikzcd}$$

Обозначим через $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n$ тавтологический флаг на $\pi^*(V)$, а через $F = F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset V$ фиксированный изотропный флаг такой, что $\pi^* F_n$ и E_n в разных скрученных семействах. Положим $x_i := c_1^{\Omega}(E_i/E_{i-1})$ - корни Черна E_n.
Определим классы $c_i \in \Omega^* Fl(V)$ по предложению 3.5, взяв в качестве максимальных изотропных подрасслоений E_n и $\pi^* F_n$. Так как $\rho_*(h^n[\mathbb{P}(E_n)]\rho^* c_i) = c_i \rho_*(h^n[\mathbb{P}(E_n)])$, где $\rho : Quad_{Fl(V)}(\pi^* V) \to Fl(V)$, а $\rho_*(h^n[\mathbb{P}(E_n)])$ равен 1 в кольце Чжоу, то в кольце кобордизмов этот элемент обратим, тем самым c_i определены однозначно.
Тогда мономы вида

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} ... c_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

при $0 \leq a_i \leq n-i$ и $\alpha_i \in \{0,1\}$ являются поднятием базиса кольца Чжоу как свободной абелевой группы [2, Теорема 8]. Так как многообразие полных флагов является клеточным, рассуждения аналогичные пункту 3.1 показывают, что эти элементы являются базисом $\Omega^* Fl(V)$ как $\mathbb{L}$-модуля. Тем самым получаем:

$$\Omega^* Fl(V) \cong \mathbb{L}[x_1, ... x_n, c_1, ..., c_{n-1}]/I$$

для некоторого идеала I. Так как $\pi^* F_n$ является тривиальным расслоением y_i равны нулю, поэтому $\gamma_m(\chi(y_1), ..., \chi(y_n)) = 0$ при $m \neq n$ и $\gamma_m(\chi(y_1), ..., \chi(y_n)) = 1$ при $m = n$. Следовательно по пункту a) предложения 3.5 используя то, что $\pi^*(V)$ тривиальное расслоение получаем соотношения на для всех $0 \leq m \leq n-1$

$$\sum_{\substack{k \geq 1 \\ i=0,...,n-1 \\ i+k=m}} (-1)^i c_{n-i-1} D_k + \sum_{\substack{j \geq 0 \\ i=0,...,n-1 \\ i+j=m}} \alpha_i \gamma_j(\chi(x_1), ..., \chi(x_n)) = \gamma_m(\chi(x_1), ..., \chi(x_n)).$$

По [4, Утверждение 5.1] существует следующий изоморфизм:

$$\Omega^*(SO_{2n}) \cong \Omega^* Fl(V)/(x_1, ..., x_n).$$

Рассматривая первое $n-1$ равенство выше по модулю идеала порожденного $x_1, ..., x_n$ получаем соотношения на элементы $c_1, ..., c_{n-1}$ в кольце $\Omega^*(SO_{2n})$:

$$\sum_{\substack{k \geq 1 \\ i=0,...,n-1 \\ i+k=m}} (-1)^i c_{n-i-1} D_k = 0 \text{ для } m \in \{0, ..., n-2\}.$$

$\square$

Доказательство теоремы 4.1. Обозначим через $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n$ тавтологический флаг на $\pi^*(V)$, а через $F = F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset V$ фиксированный изотропный флаг такой, что $\pi^* F_n$ и E_n были в разных скрученных семействах. Положим $x_i := c_i^{\Omega}(E_i/E_{i-1})$ - корни Черна E_n. Так же положим $L := E_n^{\perp}/E_n$.
Рассмотрим расслоение на квадрики ассоциированное с векторным расслоением $\pi^*V \otimes L$ и определим классы $c_i \in \Omega^* Fl(V)$ по предложению 3.5, взяв в качестве максимальных изотропных подрасслоений $E_n \otimes L$ и $\pi^* F_n \otimes L$.

$$\begin{tikzcd} Quad_{Fl(V)}(\pi^*V \otimes L) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \mathbb{P}(\pi^*V \otimes L) \arrow[dl] \\ & Fl(V) & \end{tikzcd}$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 4.2 получим, что мономы вида

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} ... c_n^{\alpha_n}$$

при $0 \leq a_i \leq n - i$ и $\alpha_i \in \{0, 1\}$ является базисом $\Omega^* Fl(V)$ как $\mathbb{L}$-модуля. Обозначим через $z_1, ..., z_n$ корни Черна расслоения $E_n \otimes L$. Рассмотрим следующие точные последовательности векторных расслоений:

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E_n^{\perp} \longrightarrow E_n^{\perp}/E_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_n^{\perp} \longrightarrow \pi^*V \longrightarrow \pi^*V/E_n^{\perp} \longrightarrow 0.$$

По формуле Уитни получим равенства первых классов Черна:

$$c_1^{\Omega}(E_n^{\perp}) = c_1^{\Omega}(E_n) + c_1^{\Omega}(E_n^{\perp}/E_n)$$
$$c_1^{\Omega}(\pi^*V) = c_1^{\Omega}(E_n^{\perp}) + c_1^{\Omega}(V/E_n^{\perp}).$$

Так как расслоение π^*V тривиально, из этого следует, что по модулю идеала порожденного $x_1, ..., x_n$ первый класс Черна линейного расслоения L равен нулю. Тогда по [6, Лемма 2.3.6] $z_1, ..., z_n$ равны нулю в $\Omega^*(SO_{2n+1})$. Повторив данное вычисление для расслоений $E_n \otimes L$, $(E_n \otimes L)^{\perp}$ и $\pi^*V \otimes L$ получим $c_1^{\Omega}((E_n \otimes L)^{\perp}/(E_n \otimes L)) = 0$ в $\Omega^*(SO_{2n+1})$, откуда получаем $\gamma_m(\chi(z_1), ..., \chi(z_n), q) = 0$ при $m \neq n+1$ и $\gamma_m(\chi(z_1), ..., \chi(z_n), q) = 1$ при

$m = n + 1$.
Искомые соотношения являются частным случаем пункта б) предложения 3.5 при $r \in \{0, ..., n-1\}$. $\square$

Список литературы

[1] Солынин А. А., *Гомоморфизм Гизина в обобщенных теориях когомологий*, Алгебра и анализ, 17:3 (2005), 184–203; St. Petersburg Math. J., 17:3 (2006), 511–525.

[2] Edidin D., Graham W., *Characteristic classes and quadric bundles*, Duke Math. J., Volume 78, Number 2 (1995), 277-299.

[3] Fulton W., *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] Gille S., Zainoulline K., *Equivariant pretheories and invariants of torsors*, Transf. Groups 17 (2012), no.2, 471–498.

[5] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., 52, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.

[6] Hudson T., *Thom-Porteous formulas in algebraic cobordism*, Preprint arxiv.org:1206.2514, 2012.

[7] Lam T. Y., *Serre's problem on projective modules*, Springer Monographs in Mathematics (2006) 1-412.

[8] Levine M., *Comparison of cobordism theories*, J. Algebra 322 (2009), no. 9, 3291-3317.

[9] Levine M., Morel F., *Algebraic cobordism*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[10] Levine M., Pandharipande R., *Algebraic cobordism revisited*, Invent. math. 176, 63–130 (2009).

[11] Milne J. S., *Algebraic Groups. The Theory of Group Schemes of Finite Type over a Field*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 170, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[12] Nakagawa M., *A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds*, Fund. Math. 199 (2008), no. 3, 273–293.

[13] Nenashev A., Zainoulline K., *Oriented cohomology and motivic decompositions of relative cellular spaces*, Journal of Pure and Applied Algebra 205 (2006), 323-340.

[14] Panin I., Smirnov A., *Riemann-Roch Theorems for Oriented Cohomology*, Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory, 2004, Volume 131.

[15] Yagita N., *Algebraic cobordism of simply connected Lie groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 139 (2005), no. 2, 243–260.